关于两集合元素相加问题的初步研究

陈恩献　　陈钱钰　　胡诗庭

（温州中学高三（1）班　　浙江温州　　325014）

指导老师　陈相友

摘要：

本文由一个较为常见的结论出发，研究集合的元素相加这一模型的性质，得到和的个数与两集合元素的书之间的关系，并研究达到一定等量关系的充要条件，在研究和的个数等于两集合元素个数之和的充要条件时，我们从特殊情况入手，逐步推进，最终达到了目标。

一、引言

集合的元素之和是一个深刻而又有趣的话题，其中结论众多。我们注意到其中一个优美的命题（结论一），希望以此为出发点，得到更多让我们感到惊喜的结论。

我们有如下问题：

1、和的取值个数与原集合的元素个数有怎样的关系？

2、和的取值在与原集合元素个数达到某个等量关系的充要条件是什么？

这两个问题将成为我们主要的研究对象。

二、结论与证明

结论一：A 和 B 是 R 的两个非空子集，且设 C=A+B={a+b|a∈A，b∈B}则|C|≥|A|+|B|-1。

证明：设|A|=m，|B|=t，t≥m。

记 A=$\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m\}$，B=$\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_t\}$

且 $x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_m$，$y_1 < y_2 < \cdots\cdots < y_m$

考虑下面 t+m-1 个数

$x_1+y_1 < x_1+y_2 < \cdots < x_1+y_t < x_2+y_t < \cdots < x_m+y_t$ ……①

它们互不相同，故|C|≥|A|+|B|-1。

结论一是一个常见结论，它给出了|A+B|的最小值，而|A+B|显然不超过|A|×|B|，|A+B|只能在|A|+|B|-1，|A|+|B|，…，|A|×|B|中取值，但我们发现事实上|A+B|可取遍|A|+|B|-1，|A|+|B|，…，|A|×|B|中的全部值，于是得出了结论二。

结论二：A 和 B 是 R 的两个非空子集，且设 C=A+B={a+b|a∈A，b∈B}则|C|可取遍|A|+|B|-1，|A|+|B|，…，|A|×|B|中的全部值。

证明：不妨设|A|=m，|B|=t，t≥m。

先看|c|=m×t 的情形，采用直接构造

不妨令 B={1，2，…，t}，A_{mt}={1，t+1，2t+1，…，(m-1)t+1}

则 C=A_{mt}+B={2, 3，…，mt+1}，为证明此，我们给出下面的引理

引理一：A′ ∈N+, A′ ={a_1, a_2}, B={1, 2, …, t}, $a_2 \geqslant a_1$+n

则 A′ +B={a_1+1， a_1+2，…， a_2+t}

引理一的证明：以下这串数列中的数均是 A′ +B 中的数a_1+1， a_1+2, …， a_1+t， a_2+1, a_2+2, …， a_2+t。

∵（a_2+1）-(a_1+t)= a_2-a_1+1-t≥t+1−t=1. ∴它取遍a_1+1, …， a_2+t 中所有整数，引理一得证。

下面回到原命题，由引理一易得A_{mt}+B={2, 3, …, mt+1}, 则|A_{mt}+B|=mt，我们试图经过调整A_{mt}，依次得到A_{mt-1}，A_{mt-2}, …A_{m+t-1}, 使|A_k+B|=k

记$x_k = \max\limits_{x \in A_k} x$，$y_k = \max\limits_{\substack{y \notin A_k \\ y < x_k}} y$，$A_k = A_{k+1} \backslash \{x_{k+1}\} \cup \{y_{k+1}\}$

事实上，A_k是由A_{k+1}去掉A_{k+1}中的最大元，补上小于A_{k+1}的最大元且不属于A_{k+1}的最大整数得到的，因此$x_k = x_{k+1} - 1$

由此可知A_k中相邻两元素差的绝对值不超过 t

设$A_k = \{x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,m}\}$, $1 = x_{k,1} < x_{k,2} < \cdots < x_{k,m} = x_k$,

由引理

A_k+B={$x_{k,1}$+1， $x_{k,1}$+2, …， $x_{k,m}$+t},

|A_k+B|=$x_{k,m}$+t−1=x_k−1+t=x_{k+1}−2+t=|A_{k+1}+B|−1=…=|A_{mt}+B|−mt+k=k

结论二得证！

得到结论二之后，我们希望得到|C|=|A+B|=k 的充要条件，我们先尝试了|C|=m+t-1 的情形，得到了结论三。

结论三：结论一中，当|C|=|A|+|B|-1 时（|B|≥2），A, B 中的元素均构成等差数列，且两数列公差相同。

证明：采用与结论一相同的记法，考虑下面 t+m-1 个数

$x_1 + y_1 < x_2 + y_1 < \cdots < x_m + y_1 < x_m + y_2 < \cdots < x_m + y_t$ ……②

比较①与②中的 t+m-1 个数

易知它们一一对应,

故可推得 $y_2 - x_2 = y_1 - x_1$， y_3-x_3= $y_1 - x_1$,⋯⋯， y_m -x_m= $y_1 - x_1$,(m<=t);

令 $y_1 - x_1$ =d,由于将集合B中的数都减去一个相同的数时，结论不变，故可将B中每个都减去d，

则变换后B中前m个数为{ x_1, x_2,⋯⋯,x_m},

由结论一，集合{ x_1, x_2,⋯⋯,x_m}和自身相加所得的集合至少 2m-1 个元素，它们都不超过

2x_m，当然也都小于x_m+y_{m+1},
又x_m+ y_{m+1}<x_m+y_{m+2}<⋯⋯<x_m+y_t是t-m不同的数，
故|c|≥2m-1+t-m=m+t-1 等号成立时，我们有

集合{ x_1, x_2,⋯⋯,x_m}与自身相加只得到 2m-1 个数，考虑下面 2m-1 个数

$2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2$ <⋯⋯<x_{m-1}+x_m<2x⋯⋯③

∵ $x_1 + x_2 < 2x_2$ <x_3+ x_2 ， $x_1 + x_2 < x_1$ +x_3< x_2 +x_3

∴$2x_2 = x_1$ +x_3 ∴ x_1, x_2,x_3成等差数列。

同理可得 x_1, x_2,⋯⋯,x_m成等差数列，即集合A中的数构成等差数列，由①又知B中数也成等

差数列，且公差与A相等，
又当 A 中的数和 B 中的数都构成等差数列时，显然它们相加所得集合中有|A|+|B|-1 个元素，结论三得证！

结论三中|B|≥2 是必要的，否则 A 集合元素可任取，不一定要构成等差数列，我们发现|C|=|A|+|B|-1 的成立条件比较严格，那么放松一步，当|C|=|A|+|B|的情况又如何呢？经过研究，这一情况比较复杂，我们先给出 A=B 即一个集合自身相加的情况。

结论四：A 是 R 的一个非空子集，|A|=n（n>3）记集合 x={x+y|x，y∈A}则使 x 恰有 2n 个元素的 A 为{a，a+d,a+2d, ⋯,a+（n-2）d，a+nd}或{a,a+2d,a+3d, ⋯,a+（n-1）d，a+nd}。
证明：由于将 A 中的元素同时加上（或减去）一个数后结论不变。故可不妨设 A 中的最小元素为 0，又将 A 中元素同时乘一个数（非零）后结论仍不变，故可不妨设 A 中最大元素为 1，则我们只需证明满足要求的 n 元集合为{0, $\frac{2}{n}$， $\frac{3}{n}$,⋯, $\frac{n-1}{n}$,1}或{0, $\frac{1}{n}$， $\frac{2}{n}$,⋯, $\frac{n-2}{n}$,1}

设 A={ x_1, x_2，⋯， x_n }下面这串数列是 x 中的元素

$2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2 < x_2 + x_3 < \cdots < x_{n-1} + x_n < 2x_n$ ⋯⋯④

这是 X 中 2n−1 个不同的数，而|x|=2n−1，设余下的一个数为 C

且 $x_{k-1} + x_k$ <C< $x_k + x_{k+1}$ （2≤k≤n−1）

则集合{x_1，x_2,⋯，x_k}和{x_1，x_2,⋯，x_{k-1}}相加之后恰有 2k−2 个元素

集合{ x_{k+1} ，…,， x_n }和{ x_k ， x_{k+1} ,…， x_n }相加后恰有 2n−2k 个元素

由结论三可知

x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_k 构成等差数列， x_k , x_{k+1} ,…， x_n 也够成等差数列

但公差不等，否则由结论三可知，x 中只有 2n−1 个数

下面分两种情况讨论

1° 若 $x_{k-1}+x_k$ <c<2 x_k

∵ $x_{k-1}+x_k < x_k+x_{k+1} < x_k+x_{k+1}$, 而 $x_{k-1}+x_{k+1} \neq 2x_k$

∴c= $x_{k-1}+x_{k+1}$

若 k>2 则由于 $x_{k-1}+x_{k-2} < x_{k-2}+x_{k+1}$ <c

故 $x_{k-2}+x_{k+1}$ =2 x_{k-1} 或 $x_{k-1}+x_k$

若 $x_{k-2}+x_{k+1}=x_{k-1}+x_k$ 则 $x_{k-1}-x_k=x_{k-1}-x_k$

矛盾！

故 $x_{k-2}+x_{k+1}$ =2 x_{k-1} 则 $x_{k+1}-x_{k-1}=x_{k-1}-x_{k-2}$

而 $x_{k+1}-x_{k-1} > x_k — x_{k-1}=x_{k-1}-x_{k-2}$ 矛盾！

故 k=2 ， c= x_1+x_3

因为 $x_1+x_3<x_1+x_4<x_3+x_4$ 所以 x_1+x_4 =2 x_2 或 x_2+x_3 或 2 x_3

若 $x_1+x_4=x_2+x_3$ $x_2 — x_1=x_4 — x_3$ 矛盾！

若 x_1+x_4 =2 x_3 则 $x_4 — x_3=x_3 — x_1>x_3 — x_1=x_4 — x_3$ 矛盾！

所以 x_1+x_4 =2 x_2， $x_1 — x_2=x_2 — x_4$ =2($x_2 — x_3$)

所以这个数列为 $\{0,\frac{2}{n}, \frac{3}{n},\cdots, \frac{n-1}{n},1\}$

2° 若 2 x_k <c< x_k+x_{k+1} 同 1° 类似地这列数为 $\{0,\frac{1}{n}, \frac{2}{n},\cdots, \frac{n-2}{n},1\}$

结论四证毕！

由证明过程知 n〉3 是必需的，下面我们将运用结论会得到更一般的结论五。

结论五：A，B 是 R 的两个非空子集（A， B 不相同）,|A|=n , |B|=n, n>3,记集合 C ＝｛x+y ｜ x∈A, y∈B}

则使 C 恰有 2 n 个元素的 A， B 应满足

A＝｛d,2d,……,kd,(k+2)d,……(n+1)d｝（1≤k≤n−1）

B＝｛d,2d……nd｝

或 A＝｛d,2d……nd｝

B＝｛d,2d……kd,(k+2)d,……(n+1)d｝（1≤k≤n−1）

以及 A， B 中元素分别加上（或减去）一个实数的集合.

证明：设 A＝｛ $x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n$ ｝ B＝｛ $y_1, y_2 \cdots\cdots, y_n$ ｝ $x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n$ ，

$y_1 < y_2 < \cdots\cdots < y_n$

则有 $x_1 + y_1 < x_1 + y_2 < \cdots\cdots < x_{n-1} + y_{n-1} < x_{n-1} + y_n < x_n + y_n$ ……⑤

⑤中共有 2n−1 个不同的数。设集合 C 中不在⑤中出现的一个数为 c。

1° $x_1 + y_1$ ＜c＜ $x_1 + y_2$ ，记 B′ =｛ y_2 ，…， y_n ｝则 A 与 B′ 相加得到的新集合至少出现 2n−2 个不同的数，它们都大于 c 和 $x_1 + y_1$ ，故集合 C 中至少出现 2n−2+1+1=2n 个数，故 A+B′ 只有 2n−2 个元素

由结论三知，数列｛ x_1 ， x_2 ，…， x_n ｝，｛ y_2 ， y_3 …， y_n ｝成公差相等的等差数列,

将 A,B 同时加（或减）一个数结论不变

故可不妨设 $x_2 = y_2$ ， $x_3 = y_3$ ，…， $x_n = y_n$ ， x_i =id（i=1,2，…，n）

∵ $y_1 + x_1$ ＜ $y_2 + x_1$ =3d ∴ $x_1 + y_1$ 不出现在 A+B′ 中

若 $y_1 + x_2$ 在 A+ B′ 中 ，则 $y_1 + x_2$ =3d 即 y_1 =d。此时 C 中只有 2n−1 个元素，矛盾!

∴ $x_1 + y_1$ ， $y_1 + x_2$ 均不在 A+ B′ 中，∴ $y_1 + x_3$ 在 A+ B′ 中，∴只能是 $y_1 + x_3$ =3d，∴ y_1 =0.

此时 A：{d，2d，…，nd} B：{0，2d，3d，…，nd},经检验，符合要求。

2° $x_{n-1} + y_n$ <c< $x_n + y_n$,则与 1° 完全类似可得

A={d,2d,…,(n−1)d,(n+1),B={d,2d,…,(n−1)d,nd}

3° $x_{k-1} + y_{k-1}$ <c< $x_{k-1} + x_k$ (3≤k≤n)

记 A1={ x_1 , x_2 ,… x_{k-1} },A2={ x_{k-1} , x_k ,…, x_n }

B1={ y_1 , y_2 ,…, y_{k-1} },B2={ y_k , y_{k-1} ,…, y_n }

则 $|A_1+B_1|$ ≥2k−3, $|A_2+B_2|$ ≥2n−2k+2,而 2k−3++2n−2k+2+1=2n,

∴只能是 $|A_1+B_1|$ =2k−3, $|A_2+B_2|$ =2n−2k+2

由结论三，A_1,B_1中的数构成公差相等的等差数列，A_2,B_2中的数构成公差相等的等差数列，与前面类似的，可设 $x_1 = y_1$ ， $x_2 = y_2$,…， $x_{k-1} = y_{k-1}$

∵2 x_{k-1} < x_k+x_{k-1} < x_k+y_k , ∴ x_k+x_{k-1}=c 或 $x_{k-1}+y_k$

① 若 $x_k+x_{k-1}=x_{k-1}+y_k$， $x_k=y_k$, 从而推得 A=B

此即为结论四。

②若 x_k+x_{k+1}=c

由 $x_{k-1}+y_{k-1}$ <c< $x_{k-1}+y_k$ 知 $x_{k-1}+y_{k-1}<x_k+x_{k-1}<x_{k-1}+y_k$

由 k≥3，我们考虑 x_k+x_{k-1}

∵ $x_{k-2}+y_{k-1}=x_{k-2}+x_{k-1}<x_k+x_{k-2}<x_k+x_{k-1}$

∴ x_k+x_{k-1}=2 x_{k-1} 即 $x_k-x_{k-1}=x_{k-1}-x_{k-2}$

∴集合 A 中的数成等差数列

下面再考虑 y_k+x_{k-2}

∵ $x_{k-2}+x_{k-1}<x_{k-2}+y_k<x_{k-1}+y_k$

∴ $x_{k-2}+y_k$ =2 x_{k-1} 或 x_k+x_{k-1} 若 $x_{k-2}+y_k$ =2 x_{k-1}

则 $x_{k-1}-x_{k-2}=y_k-x_{k-1}$ ∴ $x_{k-1}-x_{k-2}=x_k-x_{k-1}$ ∴ $x_k=y_k$ 从而 A=B

但此时|A+B|=2n-1

若 $x_{k-2}+y_k=x_k+x_{k-1}$ 即 $y_k-x_{k-1}=x_k-x_{k-2}$=2（x_k-x_{k-1}）

∴此时 A={d,2d,…,nd} B={d,2d,…kd,（k+2)d,…,(n+1)d}(1≤k≤n-1)

4° 若 $x_{k-1}+y_k$ <c< x_k+y_k (2≤k≤n-1)

此时可与 3° 完全类似推得 A={d,2d,…kd,(k+2)d,…,(n+1)d}(1≤k≤n-1)B={d,2d,…,nd}
综合 1°，2°，3°，4° 可得结论五。

最后给出|A+B|=|A|+|B|最一般的情况，我们将用结论三，四，五推出结论六。

结论六：A,B 是 R 的两个非空子集 A={ x_1, x_2,…, x_t }其中 $x_1<x_2<\cdots<x_t$

B={ y_1, y_2,…, y_n }其中 $y_1<y_2<\cdots<y_m$,m≥t,C=A+B={x+y|x∈A， y∈B}

则使|c|=k+m 的充要条件是 A={d,2d,…,td},B={d,2d,…kd,(k+2)d,…,(m+1)d}(1≤k≤m-1)
或 A={d,2d,…kd,(k+2)d,…,(t+1)d}(1≤t≤k-1),B={d,2d,…,md}或 A={d,2d,…,(t-1)d,（t+1)d},B={d,2d,…,(m-1)d,(m+1)d}以及 A,B 分别加上（或减去）一个数的集合。

证明：必要性显然。设B₁={ y_1, y_2,…, y_t },B₂={ y_{t+1},…, y_m }

|A+B₁|≥2t-1 对于x∈A+B₁，则x≤ $x_t+y_t < x_t+y_{t+1} < x_t+y_{t+2} < \cdots < x_t+y_m$

记C_1=A+B_1，C_2={ x_t +yi|t+1≤i≤m}，则$C_1∩C_2$=空集

（∴|C|≥|$C_1∪C_2$|=|C_1|+|C_2|≥2t-1+m-t=t+m-1，又|C_1|+|C_2|≤t+m）欲使|C|=t+m只有|C_1|=2t,|C_2|=m-t，或|C_1|=2t-1,|C_2|=m-t+1

1°若|C_1|=2t-1,|C_2|=m-t+1

由结论三，我们可设 x_1=d, x_2=2d,…, x_t=td, $y_1=x_1$, $y_2=x_2$,…, $y_t=x_t$

记不出现在$C_1∪C_2$的C中的数为a。

考虑数 $y_{t+1}+x_{t-1}$

① 若a≠ $y_{t+1}+x_{t-1}$，则 $x_{t-1}+y_{t+1}$∈C_1，由于 $x_{t-1}+y_{t+1}$=(t-1)d+ y_{t+1}>(t-1)d+ y_t=(2t-1)d而

$\max_{x\in C_1} x$≤2td,∴只能 $x_{t-1}+y_{t+1}$=2td,即 y_{t+1}=(t+1)d

② 若 a= $y_{t+1}+x_{t-1}$，再考虑数 $y_{t+1}+x_{t-2}$,由于 $x_{t-1}+y_{t+1} > x_{t-1}+y_t$=(2t-2)d

∴ $x_{t-1}+y_{t+1}$=(2t-1)d或 2td，若 y_{t+1}=(t+1)d,则 $y_{t+1}+x_{t-1}$=2td∈C_1，矛盾！

故 y_{t+1}=(t+2)d，类似地，再考虑 $y_{t+2}+x_{t-1}$ 得 y_{t+2}=(t+3)d,…, y_m=(m+1)d,

对第①种情况作类似讨论得 A={d,2d,…,td}，B={d,2d,…,kd,(k+2)d,(k+3)d,…,(m+1)d}(t≤k≤m-1)

2°若|C_1|=2t,|C_2|=m-t+1

则由结论五，可分为以下 3 种情况

① x_i=id（1≤i≤t）且存在 k（1≤k≤t-1）使 y_k=kd ， y_{k+1}=（k+2）d

此时完全类似 1°可得 y_t=（t+1）d（t≥k+1）

② y_i=id（1≤i≤t）且存在 k（1≤k≤t-2）使 x_k=kd ， x_{k+1}=（k+2）d

仍类似 1°可得 y_i=di（1≤i≤m）

③ y_i=id（1≤i≤d）且 x_{t-1}=(t-1)d x_t=(t+1)d

此时仍类似 1°的讨论可知 y_i=id（1≤i≤m-1） y_m=md 或(m+1)d

结合 1°，2°结论六证毕。

对|A+B|=|A|+|B|的充要条件我们的做法已非常的繁琐，但是结论还是较严格的，但当|A+B|=k，k 足够大时，A 与 B 的性质就不好把握了。例如|A+B|=|A|+|B|时，A,B 的条件还是非常宽泛的（例如结论三给出的构造，或用进位制给出构造）但如果用本文的方法做下去将会不胜其烦，我们期待能有更好的方法得出|A+B|=k 时的充要条件。